γ) $b_k = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t}\cdot(\lambda t)^k}{k!} \cdot b(t)\,dt$

δ) $b_k = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}\, \mu e^{\mu t}\, dt = \frac{\lambda^k \cdot \mu}{k!}\int_0^\infty t^k \cdot e^{-(\mu+\lambda)t}\, dt$

Θα προσπαθήσουμε να φέρουμε μέσα στο ολοκλήρωμα την συνάρτηση αυτή σε μία συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας γνωστή σε εμάς. (Συγκεκριμένα αναζητούμε τις συνεχείς κατανομές με σππ. και πεδίο ορισμού το $x \geq 0$)

Η μόνη που μας εξυπηρετεί η κατανομή Γάμμα(α,β), $\alpha = k+1$, $\beta = \frac{1}{\mu+\lambda}$

Έτσι

$$b_k = \frac{\lambda^k \cdot \mu}{k!}\cdot\frac{\Gamma(k+1)}{(\mu+\lambda)^{k+1}}\underbrace{\int_0^\infty \frac{t^{(k+1)-1}\cdot e^{-t/(1/(\mu+\lambda))}}{\left(\frac{1}{\mu+\lambda}\right)^{k+1}\Gamma(k+1)}\, dt}_{1} \overset{*}{=} \frac{\lambda^k \cdot \mu}{(\mu+\lambda)^{k+1}}$$

(*) Αφού σππ. $\int_{ΠΟ} f_X(x)dx = 1$ και $f_X(x) \geq 0$

και $\Gamma(k+1) := k!$

Ερωτήματα (για πολλές καταστάσεις)

i) $p_j^{(n)} = ;$

ii) $p_{ij}^{(n)} = ;$

iii) $\lim p_{ij}^{(n)} = \Pi_j$ ισχύει;

Απόδειξη:

i) Η απόδειξη όμοια με παλαιότερα στις 2 καταστάσεις

$$p_j^{(n)} = p_0^{(n-1)} \cdot p_{0j} + p_1^{(n-1)} \cdot p_{1j} + p_2^{(n-1)} \cdot p_{2j} + \dots$$

$$p_j^{(n)} = \left(p_0^{(n-1)}, p_1^{(n-1)}, p_2^{(n-1)} \dots\right) \begin{pmatrix} p_{0j} \\ p_{1j} \\ p_{2j} \\ \vdots \end{pmatrix} = p^{(n-1)} \cdot (\text{Στήλη } j+1 \text{ του } P)$$

όπου

$$P = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 0 & 1 & \dots & j & \dots \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \\ \\ \end{matrix} & \left[\begin{matrix} & & & p_{0j} & \\ & & & p_{1j} & \\ & & & p_{2j} & \\ & & & \vdots & \end{matrix}\right] \end{array}$$

Άρα, $p^{(n)} = p^{(n-1)} P = \dots = p^{(0)} \cdot P^n$

ii) $p_j^{(n)} = p_0^{(0)} \cdot p_{0j}^{(n)} + p_1^{(0)} \cdot p_{1j}^{(n)} + p_2^{(0)} \cdot p_{2j}^{(n)} + \dots$

$$p_j^{(n)} = \left(p_0^{(0)}, p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \dots\right) \begin{pmatrix} p_{0j}^{(n)} \\ p_{1j}^{(n)} \\ p_{2j}^{(n)} \\ \vdots \end{pmatrix} = p^{(0)} \begin{pmatrix} p_{0j}^{(n)} \\ p_{1j}^{(n)} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

όπου

$$p^{(n)} = p^{(0)} \cdot \begin{bmatrix} p_{00}^{(n)} & p_{01}^{(n)} & p_{02}^{(n)} & \dots \\ p_{10}^{(n)} & p_{22}^{(n)} & p_{32}^{(n)} & \dots \\ p_{20}^{(n)} & p_{23}^{(n)} & p_{33}^{(n)} & \dots \\ \vdots & \vdots & & \end{bmatrix}$$

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_k p_{ik}^{(n)} \cdot p_{kj}^{(m)} \leftarrow \text{Kolmogorov}$$

iii) Θα απαντηθεί αργότερα

ΟΡΙΣΜΟΣ - ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΣ

Ορισμός 1: Η κατάσταση j που ανήκει στο χώρο καταστάσεων S, ονομάζεται προσιτή από την $i \in S$, αν $\exists n \geq 0$ τ.ω. $p_{ij}^{(n)} > 0$

Γράφουμε τότε $i \to j$ (i πηγαίνει στη j)

[Δηλαδή υπάρχει δρόμος για να πάμε από την $i \to j$]

Ορισμός 2: Οι καταστάσεις $i, j \in S$ επικοινωνούν αν το $i \to j$ και το $j \to i$. Δηλαδή $\exists n \geq 0$: $p_{ij}^{(n)} > 0$ και $\exists n' \geq 0$ $p_{ji}^{(n')} > 0$. Γράφουμε $i \longleftrightarrow j$ (Αμφίδρομη σχέση)

ΘΕΩΡΗΜΑ: Μία σχέση επικοινωνίας είναι σχέση ισοδυναμίας, αν:

i) $i \leftrightarrow i$ (Αναυλαστική)

ii) $i \leftrightarrow j \Rightarrow j \leftrightarrow i$ (Συμμετρική)

iii) $i \leftrightarrow j$ και $j \leftrightarrow k \Rightarrow i \leftrightarrow k$ (Μεταβατική)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Αρκεί νδο $\exists n \geq 0$: $p_{ii}^{(n)} > 0$ (για $n=0$) ισχύει

ii) $i \leftrightarrow j \Leftrightarrow \exists n \geq 0$: $p_{ij}^{(n)} > 0$ και $\exists n' \geq 0$: $p_{ji}^{(n')} > 0 \Rightarrow$

$\Leftrightarrow \exists n' \geq 0$: $p_{ji}^{(n')} > 0$ και $\exists n \geq 0$: $p_{ij}^{(n)} > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow j \leftrightarrow i$

iii) $i \leftrightarrow j \Leftrightarrow \exists n \geq 0$: $\boxed{p_{ij}^{(n)} > 0}$ και $\exists n' \geq 0$: $p_{ji}^{(n')} > 0$

$j \leftrightarrow k \Leftrightarrow \exists m \geq 0$: $\boxed{p_{jk}^{(m)} > 0}$ και $\exists m' \geq 0$: $p_{kj}^{(m')} > 0$

και ΘΔΟ

$\exists l \geq 0$: $p_{ik}^{(l)} > 0$ και $\exists l' \geq 0$: $p_{ki}^{(l')} > 0$

Έχουμε,

$$p_{ij}^{(n)} \cdot p_{jk}^{(m)} > 0 \Rightarrow p_{ik}^{(n+m)} = \sum_{z \in S} p_{iz}^{(n)} \cdot p_{zk}^{(m)} \geq p_{ij}^{(n)} \cdot p_{jk}^{(m)} > 0$$

άρα έστω $l = n+m$ και αποδείχτηκε για το l.

Τώρα για το l'

$$p_{kj}^{(m')} \cdot p_{ji}^{(n')} > 0 \Rightarrow p_{ki}^{(m'+n')} = \sum_{z' \in S} p_{kz'}^{(m')} p_{z'i}^{(n')} \geq p_{kj}^{(m')} \cdot p_{ji}^{(n')} > 0$$

άρα έστω $l' = n' + m'$ και αποδείχτηκε για το l'

Παρατηρήσεις

Οι καταστάσεις που επικοινωνούν μεταξύ τους, φτιάχνουν μία κλάση ισοδυναμίας επικοινωνούντων καταστάσεων

Ορισμός 3: Αν μία μαρκοβιανή αλυσίδα έχει όλες τις καταστάσεις της, να ανήκουν σε μία και μόνη κλάση ισοδυναμίας επικοινωνούντων καταστάσεων τότε θα λέγεται <u>μη διαχωρίσιμη</u>

<u>πχ</u>

Ο ελεύθερος απλός τυχαίος περίπατος είναι μη διαχωρίσιμος

ΟΡΙΣΜΟΙ ΕΠΑΝΑΛΗΨΙΜΟΤΗΤΑΣ:

$$f_{ij}^{(n)} = P(X_n = j,\ X_r \neq j \quad r<n \mid X_0 = i) =$$

$$= P\left(\begin{array}{l}\text{να πάω στο } j \text{ το } n\text{-οστό βήμα για } 1^{\eta} \text{ φορά} \\ \text{έχοντας αρχίσει από το } i.\end{array}\right)$$

$$f_{ij}^{*} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = P\left(\begin{array}{l}\text{να φτάσω κάποια στιγμή στο } j \\ \text{ξεκινώντας από το } i.\end{array}\right)$$

$$f_{ii}^{*} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)}$$

(Για την Ασκ. 14 του φυλλαδίου)

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{2} & \cdots & \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \qquad p_{k,0} = \frac{k+1}{k+2}, \quad p_{k,k+1} = \frac{1}{k+2}$$

- Επικοινωνούν οι καταστάσεις;

$0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to \ldots$ όλες οι καταστάσεις επικοινωνούν όπως κλάση ισοδυναμίας

- Πόσο είναι το f_{00}^{*} =;

$f_{00}^{(1)} = \frac{1}{2}$, $\quad f_{00}^{(2)} = P(0 \to 1 \to 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$f_{00}^{(3)} = P(0 \to 1 \to 2 \to 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{4} = \frac{1}{8}$,

$f_{00}^{(4)} = P(0\to1\to2\to3\to0) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5} = \frac{1}{30}.$

Επαγωγικά

$$f_{00}^{(n)} = \frac{n}{(n+1)!}$$

Ορισμός: Η κατάσταση i καλείται επαναληπτική αν $f_{ii}^*=1$ ενώ στα $f_{ii}^*<1$ η κατάσταση i καλείται παροδική (Δηλ. ∃ θετική πιθανότητα να μην επιστρέψει)

Ορισμός: Μία επαναληπτική κατάσταση λέγεται ασθενώς επαναληπτική αν $f_{ii}^*=1$ και $\mu_i = \sum_1^\infty f_{ii}^{(n)}$ = αναμενόμενος αριθμός βημάτων επιστροφής 1η φορά στο i $=+\infty$ και θετικώς επαναληπτική αν f_{ii}^* και $\mu_i<+\infty$.

Συνέχεια της Ασκ.14.

$$f_{00}^{(n)} = \frac{n}{(n+1)!}, \quad f_{00}^* = \sum_1^\infty f_{00}^{(n)} = \sum_1^\infty \frac{n}{(n+1)!} = \sum_1^\infty \underbrace{\left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right)}_{\frac{n}{(n+1)!}} = 1$$

$$\mu_0 = \sum_{n=1}^\infty n\cdot f_{00}^{(n)} = \sum_{n=1}^\infty n\cdot\left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right) = e-1$$

Να γραφεί ο πίνακας μετάβασης του απλού τυχαίου περιπάτου με δύο εμπόδια απορρόφησης στο 0 και 4.

$$P = \begin{array}{c|ccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & q & 1-p-q & p & 0 & 0 \\ 2 & 0 & q & 1-p-q & p & 0 \\ 3 & 0 & 0 & q & 1-p-q & p \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$0 \leftarrow 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3 \rightarrow 4$

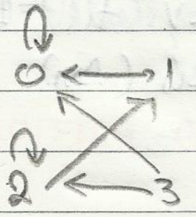
Παρατήρηση:

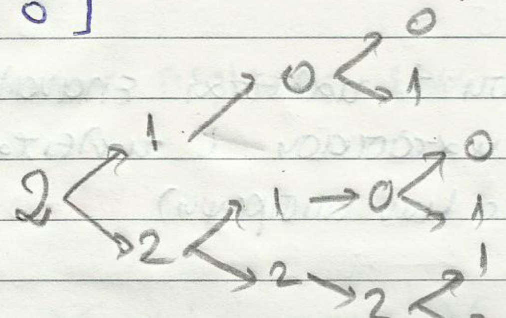
$0 \longleftrightarrow 3$ (διότι $0 \not\to 3$)

Πχ

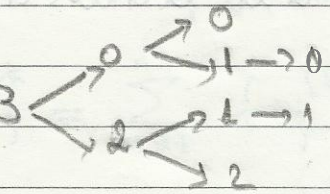
Έστω ο πίνακας

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$





$f_{33}^{(n)} = 0$ και $f_{33}^* < 1 \Rightarrow$ παροδική



$f_{22}^{(n)} = ;$

$f_{22}^{(1)} = \frac{2}{3}$, $f_{22}^{(2)} = P(2 \to 1 \to 2) = 0$

$f_{22}^{(3)} = P(2 \to 1 \to 0 \to 2) = 0$ επαγωγικά και τα άλλα 0

Άρα, $f_{22}^* = \frac{2}{3} < 1 \Rightarrow$ παροδική

Να υπολογιστούν
f_{00}^* και f_{11}^*
για το σπίτι. (+ Άσκ.15)